自己励起ホークス過程の解法とべき分布

金澤 輝代士（筑波大学システム情報系、JST さきがけ）、Didier Sornette（ETH Zurich, SUSTech）

ホークス過程は自己励起性をもつ自然・社会現象を記述するうえで有益な確率過程モデル（点過程）であり、地震の統計則・金融時系列・SNS 上の社会活動などのモデル化に活用されている。しかし、ホークス過程は強い非マルコフ性を持つモデルであるため、マスター方程式のような通常のマルコフ過程の解析手法を使用することができず、解析手法が限られているという問題点があった。そこで本研究では場の理論的な手法を新たに導入することで、ホークス過程を漸近解析する手法を提案する (K. Kanazawa and D. Sornette, Phys. Rev. Lett. 2020; Phys. Rev. Research 2020)。具体的には低次元の非マルコフ過程を、無限次元のマルコフ過程に埋め込むことで解析を行った。結果、場のマスター方程式を導出することができ、その解として定常状態の強度分布がべき分布に従うことを発見した。更に、本手法は直ちに非線形ホークス過程にも応用可能であり、様々な拡張されたホークス過程においてべき分布が現れることがわかった。自然・社会現象ではべき則は普遍的に観測されるが、それらを説明する新たな機構を本研究結果は提示しており、データ解析などにおいても有益だと期待される。

導入

自然・社会現象を記述するうえで、確率過程は非常に有益な道具である。例えば、物理現象としてはブラウン運動の理論モデル化が良く知られている。例えば物理現象としてのブラウン運動の基礎方程式はランジュバン方程式であり、マルコフ過程の確率微分方程式の範疇で解析が可能である。一方、自然・社会現象の多くは非マルコフ過程として記述されることが知られており、実はマルコフ過程の枠組みが必ずしも適用できるわけではないことも知られている。非マルコフ過程に対する数学的な枠組みは未だ確立していないため、非マルコフ過程の問題に取り組むにはトリッキーな計算テクニックを使う必要がある。

そこで本講演ではホークス過程と呼ばれる非マルコフ過程のモデルを扱う [1–3]。ホークス過程は点過程と呼ばれる確率過程のクラスであり、ランダムに発生するイベントの発生時刻列をモデル化する。まず i 番目のイベントの時刻を t_i と書くことにする（例えば地震の発生時刻、Twitter 上のリツイートの時刻などを想定すればよい）。また、新たなイベントが $[t, t + dt)$ の間に発生する確率を $\nu(t)dt$ と書くことにしよう。この $\nu(t)$ のことを強度 (intensity) と呼ぶ。ホークス過程では強度の動力学を

$$\nu(t) = \nu_0 + n \sum_{i=1}^{N(t)} h(t - t_i) \tag{1}$$

としてモデル化する。ここで $\nu_0 > 0$ はベースとなる強度であり、$n > 0$ は分岐比 (branching ratio)、$N(t)$ は $[0, t)$ でのイベント総数、$h(t) \geq 0$ は記憶効果を表す関数とする。但し $\int_0^\infty dt h(t) = 1$ としよう。

このモデルの特徴とは、自己励起性を有する結果として臨界現象を示すことができるということである。イベントが発生するたびに $\nu(t)$ は増加する、つまり、自己励起性がモデルに取り入れられている。更に $n < 1$ ではモデルは定常的だが、$n = 1$ が臨界点となり、$n > 1$ では強度が発散していく：$\lim_{t\to\infty} \nu(t) = \infty$.

この自己励起性ゆえに、ホークス過程は様々な複雑系のモデル化に使用されている [4]。たとえば、地震学においては、地震が一度発生すると余震が続々と発生する確率があがる。金融においても、誰かが売買行動を起こすと他者の売買行動が引き起こされる確率が上がることが知られている。SNS のような社会現象においても、たとえば誰かが Twitter 上でリツイートすればそのツイートはより多くの人の目に留まるため、よりリツイートされる可能性は上がる。こういった自己励起性をもつ自然・社会現象をモデル化する際に、ホークス過程は幅広く用いられている。

この様にホークス過程は有益なモデルであるが、非マルコフ過程のモデルに分類されるため解析手法が限られている。ホークス過程は比較的シンプルなモデルであるため、線形モデルの特殊性や、分岐過程へのマッピングといった特殊な計算方法を用いることで、ある程度計算を推し進めることは可能である。しかし、マルコフ過程の標準的な解法であるマスター方程式・固有関数展開といった手法を用いることはできない。ホークス過程に限らず、こういった非マルコフ過程を解析することは一般的に簡単ではなく、新たな解析手法が求められていた。

そこで、本講演では我々の論文 [5, 6] に従ってホークス過程の解法を解説する。我々はホークス過程を解析するために場の理論を用いた手法を開発した。具体的には 1 次元の非マルコフ過程であるホークス過程を、無限次元空間のマルコフ過程に埋め込む（『マルコフ埋め込み』と呼ばれる手法である）。マルコフ埋め込みを行うと、ホークス過程はマルコフな確率偏微分方程式 (stochastic partial differential equation, SPDE) と等価であることがわかる。そこでマルコフ SPDE に対する場のマスター方程式を導出し、その方程式を漸近的に解いた。結果、臨界点近傍で強度の定常分布がべき分布として記述できることがわかった。本解析手法はより複雑な非線形ホークス過程であっても拡張が可能であり、例えばジップ則を示す幅広いクラスがあることもわかった [7]。以上のように、本研究結果は自然界で普遍的に現れるべき則を説明する新たな機構を提案しており、複雑系のデータ解析の際にも有用だと考えられる。

解析手法（マルコフ埋め込み）

では解析手法の概要をこれから説明する。まず、メモリー関数 $h(t)$ を指数関数の和として分解する（本質的にはラプラス変換と等価である）。即ち、

$$h(t) = \int_0^\infty dx \frac{n(x)}{x} e^{-t/x} \tag{2}$$

とする。ホークス過程 (1) はマルコフな SPDE

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = -\frac{z(t,x)}{x} + \frac{n(x)}{x}\xi^{\mathrm{P}}_{\nu(t)} \tag{3a}$$

$$\nu(t,x) = \nu_0 + \int_0^\infty dx z(t,x) \tag{3b}$$

と等価である。但し、$\xi^{\mathrm{P}}_{\nu(t)}$ は強度が $\nu(t)$ で与えられるポアソンノイズである。ポアソンノイズは一般に $\xi^{\mathrm{P}}_{\nu(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)}\delta(t-t_i)$ と分解できることに注意しよう。この分解を念頭に、1 階の微分方程式 (3a) の形式解を式 (3b) に代入すると、マルコフ SPDE (3) はホークス過程 (1) と等価であることがわかる。

ホークス過程 (1) がマルコフ SPDE (3) と等価ということは、1 次元非マルコフ過程 $\nu(t)$ は、無限次元のマルコフ過程 $\{z(t,x)\}_x$ に埋め込めたということである。この様な数学的なテクニックをマルコフ埋め込みと呼ぶ。ただし、x は補助場 $\{z(t,x)\}_x$ のラベルであり、物理的な場所だと解釈すれば形式的には物理学で言う『場の理論』と見做すことができる。場の確率過程に対しては、汎関数をベースに構成した場のマスター方程式の手法を用いることが可能にある [8]。本解析では、ホークス過程に対する場のマスター方程式を導出し、その漸近解析を行うことにする。

マルコフ SPDE (3) に対するマスター方程式は次のように与えられる：

$$\frac{\partial P_t[z]}{\partial t} = \left(\mathcal{L}_{\mathrm{adv}} + \mathcal{L}_{\mathrm{jump}}\right) P_t[z] \tag{4}$$

但し、$\mathcal{L}_{\mathrm{adv}}$ は移流に関するリュウビル演算子、$\mathcal{L}_{\mathrm{jump}}$ はジャンプに関するリュウビル演算子、$G[z]$ は強度汎関数であり、具体的には

$$\mathcal{L}_{\mathrm{adv}} P_t[z] := \int_0^\infty dx \frac{\delta}{\delta z(x)}\left(\frac{z(x)}{x}P_t[z]\right) \tag{5a}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{jump}} P_t[z] := G\left[z - \frac{n}{x}\right] P_t\left[z - \frac{n}{x}\right] - G[z]P_t[z] \tag{5b}$$

$$G[z] := \nu_0 + \int_0^\infty dx z(x) \tag{5c}$$

として定義される。

主要結果

ホークス過程の場のマスター方程式 (4) は複雑ではあるが、臨界点近傍 $\varepsilon := 1 - n \ll 1$ では漸近解析を行うことができる。漸近解析を行うと強度の定常分布は

$$P_{\mathrm{ss}}(\nu) \propto \nu^{-1+2\nu_0\langle\tau\rangle}, \quad \langle\tau\rangle := \int_0^\infty x n(x) dx \tag{6}$$

というべき則に従うことがわかる。このべき則はかなり特殊である。実際べき指数の大きさを考慮すると、カットオフなしには確率分布の規格化ができない（実際、真のテールとして指数型のカットオフがあることがあることが知られている [4]）。しかし、ε が小さくなるにつれてカットオフ長が発散するという特殊な性質があり、臨界点近傍ではべき則が幅広い領域で観測される。この様な漸近系は中間的漸近極限（intermediate asymptotics）と呼ばれている [9]。

ホークス過程は指数型のカットオフがあるため、大きな揺らぎを表現することができないということが先行研究では問題視されていた [4]。実際複雑系では幅広いべき則が様々な系で報告されており、そういった形のモデルとしてはべき則が再現できないことは大きな問題であった。しかし、本研究の結果指数型のカットオフの前に、中間的漸近極限としてべき則が観測されることがわかった。本結果は複雑系でのデータ解析・カリブレーションに有益だと考えられる。

議論（非線形ホークスへの一般化について）

また、場のマスター方程式の枠組みはより一般化したモデルである、非線形ホークス過程 [10] に対しても適応することができる（詳細は文献 [7] を参照のこと）。非線形ホークス過程とは

$$\nu(t) = g\left(n\sum_{i=1}^{N(t)} y_i h(t-t_i)\right) \tag{7}$$

と定義される。但し、y_i は独立同分布に従う乱数であり、$g(x)$ は非負の非線形関数である。この非線形ホークス過程 (7) は非マルコフ性のみならず非線形が存在するため、特殊な場合を覗いて殆ど解の性質が知られていない（解が知られている特殊例については、例えば文献 [11] を参照)。我々は一般の非線形ホークス過程に対する場のマスター方程式を導出し、ある幅広いクラスで漸近解が求まることを示した [7]。例えば、y の統計が対称であり、$g(x)$ が 2 次関数よりも速く増大する関数の場合、強度の定常分布がジップ則を示すことがわかった。また、もっと幅広いクラスの非線形ホークス過程についても、様々な漸近解・厳密解が得られることもわかって来た。それらについても現在論文を執筆中である。

まとめ

本講演では、文献 [5, 6] に沿って、ホークス過程の漸近解法の解説を行った。まずホークス過程という低次元非マルコフ過程に対してマルコフ埋め込み法を適用することで、マルコフ場の確率過程にマップする。このマルコフ場は SPDE によって記述される。このマルコフ SPDE に対応する場のマスター方程式を導出することで、強度の定常分布の漸近解を調べた。結果、中間的漸近論としてべき分布が現れることが分かった。更に、本手法は非線形ホークス過程のようなより複雑にも適応可能であり、様々なべき則が一般化されたホークス過程で現れうることがわかってきた [7]。本研究を発展させることで、一般の非マルコフ点過程に対する漸近手法を開発することは面白い問題だと考えられる。また、本研究で得られた知見が、自然界で

現れる様々なべき則を理解するうえで役に立つことを期待する。

謝辞

講演者は日本学術振興会の科研費（No. 20H05526）、ならびに JST、さきがけ、JPMJPR20M2 の支援を受けています。

[1] A. Hawkes, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) **33**, 438 (1971).
[2] A. Hawkes, Biometrika **58**, 83 (1971).
[3] A. Hawkes and D. Oakes, J. Appl. Prob. **11**, 493 (1974).
[4] J.-P. Bouchaud, J. Bonart, J. Donier and M. Gould, *Trades, quotes and prices*, Cambridge University Press (2018).
[5] K. Kanazawa and D. Sornette, Phys. Rev. Lett. **125**, 138301 (2020).
[6] K. Kanazawa and D. Sornette, Phys. Rev. Research **2**, 033442 (2020).
[7] K Kanazawa, D Sornette, arXiv:2102.00242 (2021).
[8] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, 4th ed. (Springer, Berlin, 2009).
[9] G.I. Barenblatt, *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996).
[10] P. Brémaud and L. Massoulié, The Ann. Prob. 24 (3), 1563 1588 (1996).
[11] P. Blanc, J. Donier, and J.-P. Bouchaud, Quantitative Finance **17**, 171 (2017).