

ネット炎上の動力的モデルについて

会田 雅樹 (首都大学東京)

概要

情報ネットワーク発展と普及は社会ネットワーク上の情報交換を活性化しており、ソーシャルメディアネットワーク上のダイナミクスは興味深い研究対象となっている。特に、ネット炎上のような爆発的な振舞いがどのような仕組みで発生するのかを理解するためには、人のアクティビティが情報ネットワークを介して互いに影響を与え合うダイナミクスのモデル化が必要である。ユーザ間の相互作用の強さは一般に非対称であるので、そこから生じるダイナミクスはリンクの非対称性を考慮しなければならない。本稿では、ネットワーク上の振動ダイナミクスのモデルを導入し、それをスペクトルグラフ理論の枠組みで記述した後に、振動モデルを有向グラフ上に拡張することによって、ネット炎上の発生モデルを議論する。

1 はじめに

情報ネットワークによる情報流通の活性化は実社会のネットワーク構造にも影響を及ぼし、ネット上の現象が現実の社会活動に大きな影響を与えるようになってきている。特に、ネット炎上などに見られるソーシャルメディアネットワーク上の爆発的なダイナミクスは、一部の企業や被災者への悪影響にとどまらず、サイバーフィジカルシステムとして幅広い社会的損失を招く可能性もある。本報告は、ネット炎上を含む爆発的なダイナミクスの発生原因を工学的に理解し、その発生の抑制/緩和を工学的観点から検討するための枠組みの構築を目指したものである。具体的には、ユーザ間の非対称な相互作用を含んだネットワーク構造の分類、ネットワーク上の振動モデルによるノード中心性の拡張、一般の有向グラフに関する振動モデルの拡張、及びそこから現れる非自明で複雑なダイナミクスの分析に関する研究の進展について報告する。

一口にネット炎上と言っても、実際には個別の事情に依存した様々なパターンのネット炎上が存在する筈だが、本報告では、ソーシャルメディアネットワーク上でのユーザのアクティビティの強さが時間と共に発散する現象をネット炎上と呼ぶことにする。ネット炎上の発生・拡大に関して、それぞれの個別事情を勘案すれば、社会学的または行動心理学的など様々な観点から個別事情に応じた多様なモデル化が可能かもしれない。しかし、本稿の立場は、ネット炎上の背後にある個別事情はあえて考慮

せず、ネット炎上の現象に共通して現れる普遍的な仕組みを工学的にモデル化することを目指している。

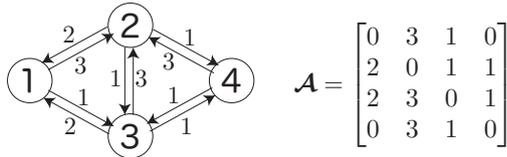
情報通信の分野では、かつて電話回線の設計問題において、特定の条件下で電話の発呼パターンはランダムであるとされ、応用上大きな成功を収めた。本来、個々の発呼の背後には人々の営みや個別の事情がある筈だが、個別事情に依らないモデル化を行うことで普遍的な取扱に成功したといえる。この例に倣うと、ネット炎上の場合も個別の事情に依らない普遍的な仕組みを考えることで、汎用的な工学的応用に結びつくのではないだろうか。少なくとも、ひとたびネット炎上が発生したとして、それに対する個別の事情を考慮した本質的な対処がなされるまでの間に、その影響が社会的に拡大することは避けなければならない。そのためには、情報ネットワーク側で即応可能な制御として、ネット炎上が大事に至らないよう激変緩和措置を講ずることが望ましい。このように、個別の事情による分析結果を待たずに即応して対応できる応急的制御のためには、個別事情に依らない普遍的なモデル化が必要なのである。

本報告の構成は以下の通りである。第2節では、社会ネットワークに現れる非対称なリンクを分類し、対称化可能な有向グラフの条件を論じる。また、その分類に基づいてネットワーク構造を表す Laplacian 行列を分解する方法を論じる。第3節では、対称化可能な有向グラフを対象にして、ネットワーク上の振動モデルを導入し、その解を求めると共に、ノードの振動エネルギーとノード中心性の関係について論じる。第4節では、対称化可能でない一般の有向グラフに対してネットワークの振動モデルを拡張し、ノード中心性が自律的に発散するようなネット炎上のモデルを提案する。また、振動モデルに基づき、ネット炎上の防止技術について論じる。第5節でまとめを行う。

2 有向グラフの分類と Laplacian 行列の分解

2.1 Laplacian 行列の定義

n ノードからなる有向グラフ $G(V, E)$ を考え、ノードの集合を $V = \{1, \dots, n\}$ 、有向リンクの集合を E とする。有向リンク $(i \rightarrow j) \in E$ は重み $w_{ij} > 0$ を持つとし、 $n \times n$ の (重みつき) 隣接行列 $\mathcal{A} = [A_{ij}]$ を以下のように



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

図 1: 有向グラフの Laplacian 行列の例

定義する .

$$A_{ij} := \begin{cases} w_{ij} & ((i \rightarrow j) \in E) \\ 0 & ((i \rightarrow j) \notin E) \end{cases}$$

次に, ノード i の (重みつき) 出次数を $d_i := \sum_{j \in \partial_i} w_{ij}$ (但し ∂_i はノード i の出リンクの隣接ノード集合) と定義し, 出次数行列を $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ とする. このとき, $G(V, E)$ の Laplacian 行列 \mathcal{L} は以下のように定義される (図 1 参照).

$$\mathcal{L} := D - A$$

定義から明らかなように, 有向グラフの Laplacian 行列は一般に非対称行列 ($\mathcal{L} \neq {}^t\mathcal{L}$) となる .

スペクトルグラフ理論とは, 隣接行列や Laplacian 行列の固有値・固有ベクトルなどからグラフの構造やグラフ上のダイナミクスを調べる理論である [1, 2, 3]. 一般に, 正方行列が対称 (行と列の入れ替えで不変) ならば多くの都合の良い性質が成り立つため, スペクトルグラフ理論は対称行列で表現可能な無向グラフに関して多くの有用な結果が知られている . 一方で, 非対称行列で表現される有向グラフへの適用は難しく, Google の PageRank [4] はその数少ない成功例の一つである .

隣接行列 A と Laplacian 行列 \mathcal{L} が持つ情報はどちらも同じである . 即ち, どちらか一方の行列が与えられればもう一方も導出できる . それ故に, グラフ $G(V, E)$ の構造を表す上ではどちらの行列も重要性は変わらない . しかし, 以降で議論するように, ネットワーク上の振動ダイナミクスを記述する際には Laplacian 行列 \mathcal{L} が重要な役割を演じる .

2.2 対称化可能な有向グラフとスケールされた Laplacian 行列

図 2 は, 非対称リンクの典型例を示したものであり, 太い矢印と細い矢印がそれぞれ影響力の強さを表している . 図 2 (a) では, リンクの非対称性をノードの特性に還元することができる . つまり, 中心のノードが強いノードで, 周囲のノードが弱いノードであるとすれば, リンク

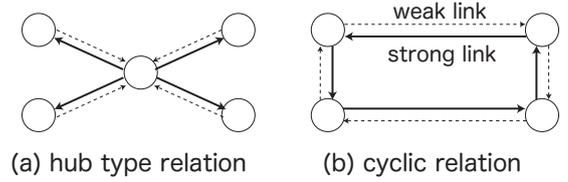


図 2: ノード間の非対称リンクの典型例

非対称性をノードの特性として表現でき, リンクの対称化が可能であると考えられる . 一方, 図 2 (b) の関係では, リンク非対称性は純粋にリンクの性質であり, ノードの特性に還元することは出来ない . このようなリンク非対称性の分類は, Laplacian 行列を用いて以下のようにまとめることができる .

ベクトル ${}^t m = (m_1, \dots, m_n)$ が ${}^t m \mathcal{L} = 0$ を満たす (固有値 0 の左固有ベクトルである) としたとき, $m_i > 0$ が任意の隣接ノード $i-j$ 間で

$$m_i w_{ij} = m_j w_{ji} \quad (\equiv k_{ij}) \quad (1)$$

を満たすと仮定する . 条件 (1) の物理的意味は第 3 節の振動モデルの説明の中で改めて議論する . 因みに図 2 (a) の非対称リンクはこの条件を満たすが (b) は満たさない .

有向グラフ $G(V, E)$ が対称化可能であるとは, 条件 (1) を満たすことであると定義する . 以降, 対称化可能な有向グラフの Laplacian 行列を \mathcal{L}_0 と表記する .

有向グラフ $G(V, E)$ が対称化可能であるとき, $G(V, E)$ のリンクの重みを $k_{ij} := m_i w_{ij}$ に置き換えた無向グラフ $G(V, E)$ を考え, $G(V, E)$ の Laplacian 行列 L を求めると, $k_{ij} = k_{ji}$ から L は対称行列となり, L と \mathcal{L}_0 の関係は

$$\mathcal{L}_0 = M^{-1} L \quad (2)$$

と書ける . 但し $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ であり, M の対角成分は

$${}^t m \mathcal{L}_0 = 0 \quad (3)$$

を満たす左固有ベクトル ${}^t m = (m_1, \dots, m_n)$ の成分である . 図 3 は, 有向グラフのラプラシアン行列を式 (2) の形に分解する例である .

次に対称 Laplacian 行列 L から scaled Laplacian 行列 S_0 を以下のように定義する [5] .

$$S_0 := M^{-1/2} L M^{-1/2} \quad (4)$$

L が対称行列なので S_0 も対称行列である . また, S_0 と \mathcal{L}_0 の関係が

$$S_0 = M^{+1/2} \mathcal{L}_0 M^{-1/2}$$

であることを用いると, \mathcal{L}_0 の固有値方程式が

$$\mathcal{L}_0 x = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad S_0 (M^{+1/2} x) = \lambda (M^{+1/2} x)$$

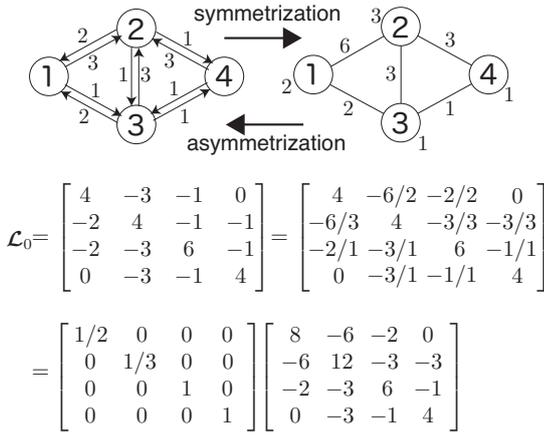


図 3: Laplacian 行列の対称化の手続き例

とかける．ここで、 λ と x はそれぞれ \mathcal{L}_0 の固有値・固有ベクトルである．このことから、 S_0 は \mathcal{L}_0 と同じ固有値を持つこと、及び互いの固有ベクトルが $M^{+1/2}$ の因子で変換できることが分かる．従って、有向グラフ $\mathcal{G}(V, E)$ が対称化可能であれば、非対称リンクを対称化することで対称な行列 S_0 を用いて分析可能であることがわかる． S_0 の二次形式

$${}^t \mathbf{y} S_0 \mathbf{y} = \sum_{(i,j) \in E} k_{ij} \left(\frac{y_i}{m_i} - \frac{y_j}{\sqrt{m_i m_j}} \right)^2 \geq 0,$$

より、 S_0 の固有値は非負で最小固有値が 0 (S_0 は非負定値行列) であることが分かる．そこで n 個の固有値を昇順に並べて

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

とし、固有値 λ_μ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) に属する固有ベクトル \mathbf{v}_μ を固有基底として (長さ 1 で互いに直交するように) 以下のように選ぶ．

$$S_0 \mathbf{v}_\mu = \lambda_\mu \mathbf{v}_\mu, \quad \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad (5)$$

ここで $\delta_{\mu\nu}$ は Kronecker のデルタである．

2.3 Laplacian 行列の分解

一般の有向グラフ $\mathcal{G}(V, E)$ は対称化可能とは限らないので、Laplacian 行列 \mathcal{L} を対称化可能な部分とそれ以外に分解することを考える．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \quad (6)$$

ここで、 \mathcal{L}_0 は (2) によって対称化可能な Laplacian 行列で、 \mathcal{L}_1 はそれ以外の部分からなる Laplacian 行列である． \mathcal{L}_0 を適当に選べば、 \mathcal{L}_1 はノード間に高々片方向のみのリンクしか存在しないグラフの Laplacian 行列とすることができる．式 (6) の分解は一意的ではないが、逆

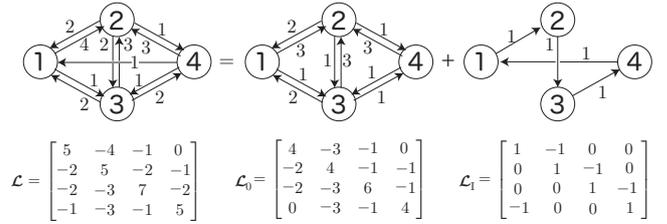


図 4: 一般の有向グラフに対する Laplacian 行列の分解例

にいえば取扱いの容易な都合の良い分解を選ぶことができる自由度がある．

図 4 は、Laplacian 行列の分解の例を示したものである． \mathcal{L}_0 に対応するグラフは図 3 と同じもので、(2) による対称化が可能である．

次に、 \mathcal{L} に対応した scaled Laplacian 行列 S に対しても以下の分解を考える．

$$S = S_0 + S_1 \quad (7)$$

ここで、 S_0 ($= M^{+1/2} \mathcal{L}_0 M^{-1/2}$) は対称な scaled Laplacian 行列で、 S_1 ($= M^{+1/2} \mathcal{L}_1 M^{-1/2}$) はノード間に高々片方向のみのリンクしか存在しないグラフの scaled Laplacian 行列である．

3 対称化可能な有向グラフ上の振動モデル

本節では、対称化可能な有向グラフ上での非対称なノード間相互作用を考慮したネットワーク上の振動モデルについて述べる [6, 7]．このモデルの重要性は、ノードの振動エネルギーがノード中心性の拡張概念を与えることにある [8]．

3.1 ネットワーク上の振動モデル

時刻 t におけるノード i の重み $x_i(t)$ が、ノードの平衡点からの変位を表すものとし、隣接ノード間には互いの変位の差に比例した復元力が働くものとする．図 5 はそのような状況の模式図である．この図は一次元ネットワークを例示したものであり、一次元ネットワークに限れば、ネットワーク上の振動モデルは縦波として図 6 のような表現も可能である．しかし、図 5 の表現は一次元以外の一般のネットワークにも拡張可能である．

まず、このモデルが極めて自然で且つ基本的であることを説明したい．各ノードがそれぞれの状態量 $x_i(t)$ を持ち、リンクを介して影響を与え合う状況を考えてみる．全てのノードの状態量 $x_i(t)$ が等しい場合、ノード間の影響が無い安定状態であると考えるのは自然である．次に、ノードの状態量 $x_i(t)$ が隣接ノード間で異なる場合、その「差」が大きいほど互いが安定状態に向かう方向に大きな復元力が働くと考えられるのも自然である．もし状態

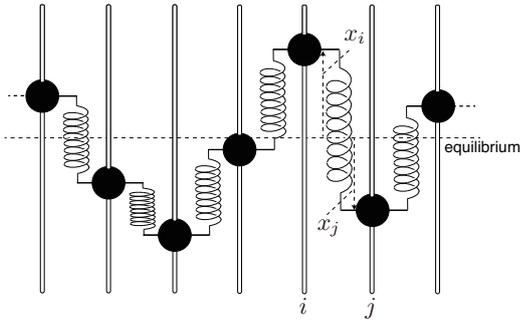


図 5: ネットワーク上の振動モデル (1)

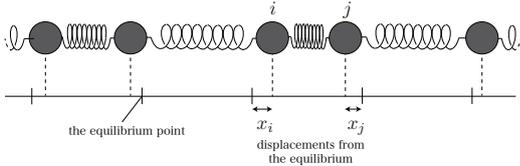


図 6: ネットワーク上の振動モデル (2)

量の「比」によって復元力が働く場合も、適当に対数を採れば「差」として考え直すことができる。復元力の強さが「差」に関するどのような関数であっても、安定状態の回りで Taylor 展開すれば、第一次の近似として「状態量の差に比例」した復元力が現れる。従って、図 5 のようなバネのモデルは、多くのモデルが共通して含んでいる特性を記述する基本的なモデルなのである。

ネットワーク上の振動モデルとしては、蔵本モデルと呼ばれる結合振動子のモデルが知られている [9]。蔵本モデルとは、図 7 に示すように、同一の（もしくは類似した）複数の振動子が、ネットワークを介して弱く結合しているモデルであり、弱い結合を介して振動子が同期する現象を記述するものである。本研究で扱う振動モデルは、隣接ノードがリンクを介して直接的に強い影響を及ぼし合うモデルであり、蔵本モデルとは本質的に異なるモデルとなっている。

隣接ノード $i-j$ 間のバネ係数を $k_{ij} = k_{ji}$ とし、ノード i の質量を m_i とすると、ノードの変位ベクトル $\mathbf{x}(t) := {}^t(x_1(t), \dots, x_n(t))$ の運動方程式は、バネ係数をリンクの重みとした（無向グラフの）対称な Laplacian 行列 $L = [L_{ij}]$ を用いて以下のように書ける（付録参照）。

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -L \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

ここで、 $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ である。両辺に左から M^{-1} を掛けると

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\mathcal{L}_0 \mathbf{x}(t) \quad (9)$$

を得る。このように、運動方程式が非対称 Laplacian 行列 \mathcal{L}_0 を用いて表現できる点が重要である。運動方程式 (9) は対称化可能な有向グラフの非対称リンクの構造を反映しており、リンクの対称化の際に導入するノードの特

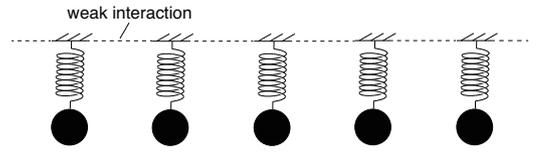


図 7: 蔵本モデル

性はノード質量に対応している。更に、リンク対称化の条件 (1) はニュートンの第三法則（作用・反作用の法則）に対応している。

ベクトル $\mathbf{y}(t)$ を

$$\mathbf{y}(t) := M^{+1/2} \mathbf{x}(t),$$

と定義することで、運動方程式 (9) を以下のように書き換えることができる。

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} = -S_0 \mathbf{y}(t) \quad (10)$$

従って、対称化可能トポロジーを持つ非対称リンク上の振動モデルは、対称な scaled Laplacian 行列 S_0 によって分析することが出来る。

運動方程式 (10) を解くために、解 $\mathbf{y}(t)$ を S_0 の固有基底 $\{\mathbf{v}_\mu\}$ によって以下のように展開する。

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu(t) \mathbf{v}_\mu \quad (11)$$

解 (11) を運動方程式 (10) に代入することで、振動モード μ ($\mu = 0, \dots, n-1$) に対する n 個の独立な運動方程式

$$\frac{d^2 a_\mu(t)}{dt^2} = -\lambda_\mu a_\mu(t)$$

を得る。これらは容易に解けて

$$a_\mu(t) = a_\mu(0) e^{\pm i \omega_\mu t} \quad (12)$$

となる。ここで $\omega_\mu = \sqrt{\lambda_\mu}$, $i = \sqrt{-1}$ である。

この結果は、対称化可能なネットワーク上の振動現象が、角振動数 ω_μ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) を持つ n 個の独立な調和振動子（普通の振り子のこと）と数学的に等価であることを示している。ここで現れる n 個の振動子はノードの数 n と等しいが、決して各ノードが独立に振動しているのではないことに注意する。各ノードは図 5 に示すように隣接ノードの影響を強く受けていて独立ではないが、ネットワーク内には全体として n 種類の振動モードが現れ、それらの振動モードが独立な振動子として振舞うという意味である。それ故に、いくら時間が経過してもそれぞれの振動解 (12) は独立して単純な動きを繰り返すことになり、時間と共に振幅が発散するなどの特異な現象が起こることはない。

式 (12) を用いると、元の運動方程式 (9) の解は以下のように得られる。

$$\mathbf{x}(t) = M^{-1/2} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu(0) e^{\pm i \omega_\mu t} \mathbf{v}_\mu \right) \quad (13)$$

3.2 ノード中心性とノードの振動エネルギー

ネットワーク上の振動モデルの重要性は、ノードの振動エネルギーがノード中心性の概念と結びつく点にある [8].

具体的な話に入る前に、ノード中心性の概念に触れておく [10, 11, 12]. ノード中心性とは、ネットワークの中で特定のノードがどのくらい重要な働きをしているかを定量的に表したもので、重要性の基準の採り方によって様々なノード中心性の概念が存在する. 次数中心性とは、ノード次数 (ノードにつながっているリンクの本数) を中心性の指標としたもので、ノード次数の高いノードほど情報の伝播に強く寄与することを評価した指標である. 媒介中心性とは、任意の 2 ノード間の最短経路が自ノードを通過する割合を中心性の指標としたもので、多くの最短経路を中継しているノードが高く評価される指標である.

質量 m , 角振動数 ω , 振幅 A の単振動の振動エネルギーが $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ で与えられることから、ノード i の振動エネルギー $E_i(t)$ は以下のように表現できる.

$$\begin{aligned} E_i(t) &= \frac{1}{2} m_i \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu}^2 |a_{\mu}(t)|^2 \left(\frac{v_{\mu}(i)}{\sqrt{m_i}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \omega_{\mu}^2 |a_{\mu}(t)|^2 (v_{\mu}(i))^2 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $v_{\mu} = {}^t(v_{\mu}(1), \dots, v_{\mu}(n))$ である. S_0 は実対称行列なので ω_{μ} や $v_{\mu}(i)$ は実数であることに注意する.

初期状態として、時刻 $t = 0$ でのノードの変位がランダムに与えられるとする. この場合、全ての振動モードが同じ強さで振動エネルギーに寄与することになる. 全ての μ に対して $|a_{\mu}(t)| = \sqrt{2}$ と選べば、ノード i の振動エネルギーは

$$E_i = \sum_{\mu=0}^{n-1} \lambda_{\mu} (v_{\mu}(i))^2 = \frac{\sum_{j \in \partial i} k_{ij}}{m_i} = d_i \quad (15)$$

となる. ここで ∂i はノード i からの出リンクが繋がる隣接ノードの集合である. 式 (15) の二つ目の等号が成り立つ理由は以下のとおりである. S_0 は直交行列 $P = (v_0, \dots, v_{n-1})$ によって $\Lambda = {}^t P S_0 P$ のように対角化できる. ここで $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ である. $S_0 = P \Lambda {}^t P$ であることを用いると、 E_i は S_0 の i 番目の対角成分であることが分かり、 d_i となる. 故に、 E_i はノード i の次数中心性を与える [8].

次に、リンクの重み w_{ij} として、任意の 2 ノード間の最短経路が有向リンク $i \rightarrow j$ を通過する本数を与える. この場合も、初期状態のノードの変位がランダムに与えられるとして、全ての振動モードが同じ強さで振動エネルギーに寄与する状況を考える. 全ての μ に対して $|a_{\mu}(t)| = \sqrt{2}$ と選べば、

$$E_i = (n-1)$$

は媒介中心性を与える [8].

このことは、異なるノード中心性の概念を共通の枠組みで理解したことになる. また、ノードの変位 $x_i(t)$ はそれ自体で物理的な意味があるわけではなく、ノードの運動エネルギーを考えることでネットワーク内でのノードの働きの強さを表現することになる. 但し、ノードの変位 $x_i(t)$ を介してノード中心性を理解することは決して無意味ではなく、ノードのアクティビティがネットワーク内を伝搬するには、その背後にノードの変位 $x_i(t)$ に基づく波の構造が必要なのである.

更に重要なことは、ノードの振動エネルギーがノード中心性の概念を拡張に結びつくことである. リンクの重みやノードの重みを変えることで、様々な中心性の尺度を作り出せるのはもちろん、運動方程式の初期条件を変えることで、特定のノードがアクティビティの起点となった場合のノード中心性なども自然に得られる. また、一般に振動現象とは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが入れ替わりながら変化することから、ノードの運動エネルギーのみを考えることにより、ネットワーク上のノードのアクティビティの伝播の経時変化を記述することも出来る [8].

3.3 ネットワーク上の減衰振動

現実の状況では振動は時間と共に減衰するので、ネットワーク上の減衰振動を考察する. 減衰力がノードの速度と質量に比例するとして、減衰振動の運動方程式は

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -L \mathbf{x}(t) - M \gamma \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (16)$$

となる. ここで $\gamma > 0$ は定数で減衰係数と呼ぶ. ベクトル $\mathbf{y}(t) = M^{+1/2} \mathbf{x}(t)$ を用いると、運動方程式は以下のように対称化できる.

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = -S_0 \mathbf{y}(t) \quad (17)$$

減衰振動の運動方程式 (16) の解は、減衰係数の強さによって振舞いが異なり、減衰が大きい場合には振動せずに平衡状態に向かうことも起こり得る. 振動モード $a_{\mu}(t)$ の解が $a_{\mu}(t) \propto e^{\alpha t}$ で与えられるとして、 α に関する特性方程式

$$\alpha^2 + \gamma \alpha + \lambda_{\mu} = 0 \quad (18)$$

を考えると、これが複素数解を持つとき $((\gamma/2)^2 < \lambda_{\mu})$ の振動モード μ の減衰振動の解は

$$a_{\mu}(t) = a_{\mu}(0) \exp[-(\gamma/2)t] \exp\left[\pm i \sqrt{\lambda_{\mu} - (\gamma/2)^2} t\right] \quad (19)$$

となる. これは、減衰係数の影響が比較的小さいために振動が起こる場合に相当する. 右辺の二つ目の指数関数の肩が純虚数であることからこの部分は振動を表し、右辺の最初の指数関数の肩が負値であることから時間と共に振幅が指数関数的に減衰する効果を表している. 振動

モード μ 毎に解 $a_\mu(t)$ を求めた後に、減衰振動の元の運動方程式 (16) の解は減衰無しの場合と同様に以下のように得られる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \left(\sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu(t) \mathbf{v}_\mu \right)$$

4 対称化可能でない有向グラフ上の振動モデルとネット炎上のモデル化

前節で述べた振動モデルは、対称化可能な有向グラフの非対称リンクを対象としたもので、一般の有向グラフへの適用はできない。本節は、振動モデルを一般の有向グラフに拡張すると共に、ネット炎上を説明可能なモデルを考察する。ここで、ネット炎上とは、ノードのアクティビティの強さ（ノードの振動エネルギー）が時間と共に発散する現象であるとする、

4.1 一般の有向グラフ上の振動モデル

前節では、対称化可能な有向グラフで記述可能なネットワーク上の振動モデルは、図 5 のような現実世界の力学モデルで表現でき、本質的に n 個の独立な振り子の運動に分解されることを述べた。このことは、いくら時間が経過してもノードの振動エネルギーが発散するような振舞いは出現しないことを示唆している。ここでは、対称化可能な有向グラフを超えて、ネットワーク上の振動モデルを一般の有向グラフに拡張することを考える。

振動モデルに S_1 からの寄与を考慮するために、運動方程式 (10) または (17) を以下のように拡張する。

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = -(\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1) \mathbf{y}(t) = -\mathbf{S} \mathbf{y}(t), \quad (20)$$

ここで $\gamma \geq 0$ である。この場合、 \mathbf{S} に対応する \mathcal{L} がリンク対称化の条件 (1) を満たさないため、拡張した振動モデル (20) はニュートンの第三法則を満たさないことになる。従って、図 5 のようなバネを用いた力学的な表現はできない。つまり、現実世界の力学的な振動ではなく、仮想的な振動モデルを考えていることになる。

scaled Laplacian 行列 \mathbf{S} が実対称行列ではなくなることから、運動方程式 (20) を解く際に以下の点に注意が必要である。

- \mathbf{S} が常に対角化可能であるとは限らない。
- \mathbf{S} の固有値は一般に複素数である。
- \mathbf{S} の固有ベクトルは一般に直交しない。

これらの性質が運動方程式 (20) の解と運動エネルギーにどう影響するか考察しよう。

\mathbf{S} の固有値を $\bar{\lambda}_\mu$ ($\mu = 0, \dots, n-1$) とし、固有値 $\bar{\lambda}_\mu$ に属する長さ 1 の固有ベクトルを $\bar{\mathbf{v}}_\mu$ とする。 \mathbf{S} が対角化出来ない場合には常に、固有値方程式

$$\det(\mathbf{S} - \bar{\lambda} \mathbf{I}) = 0, \quad (21)$$

が重解を持つ（必要条件）。ここで \mathbf{I} は単位行列である。工学的な枠組みでは、リンクの重み等のパラメタの精度は有効数字の範囲内であるため、数学的に厳密な重解となることを避けることは容易である。そのため、 \mathbf{S} は n 個の線形独立な固有ベクトルを持ち、常に対角化可能であるとして問題ない。 \mathbf{S} は以下のように対角化できる。

$$\bar{\mathbf{\Lambda}} = \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}} \quad (22)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{\Lambda}} := \text{diag}(\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_{n-1})$, $\bar{\mathbf{P}} := (\bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n-1})$ である。

固有ベクトル $\bar{\mathbf{v}}_\mu$ ($\mu = 0, 1, \dots, n-1$) が線形独立であるので、運動方程式 (20) の解 $\mathbf{y}(t)$ を

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \bar{a}_\mu(t) \bar{\mathbf{v}}_\mu.$$

のように展開し、運動方程式 (20) に代入することで、 $\bar{a}_\mu(t)$ に関する n 個の独立な運動方程式

$$\frac{d^2 \bar{a}_\mu(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\bar{a}_\mu(t)}{dt} + \bar{\lambda}_\mu = 0. \quad (23)$$

に分解できる。減衰振動の解 (19) を求めるときと同様の手順を適用し、 \bar{a} を (23) の特性方程式の解とすると、対称化可能な場合の解 (19) に相当する一般の有向グラフの場合の振動解 $\bar{a}_\mu(t)$ は以下のように書ける。

$$\bar{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu(0) \exp\left[-\frac{\gamma}{2} t\right] \exp\left[\pm i \sqrt{\bar{\lambda}_\mu - (\gamma/2)^2} t\right] \quad (24)$$

これを用いると、運動方程式 (20) の解 $\mathbf{y}(t)$ は以下のように書ける。

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \bar{a}_\mu(t) \bar{\mathbf{v}}_\mu \quad (25)$$

この過程で、 \mathbf{S} の固有値 $\bar{\lambda}_\mu$ が複素数であることが $|\bar{a}_\mu(t)|$ の振舞いに大きな影響を及ぼす。また、 $\mathbf{y}(t)$ を元にしてノードの振動エネルギーを考える際に、固有ベクトルが直交していないことにより、振動モード間の結合が発生する。

4.2 ネット炎上のモデル化と対策技術

ここでは、 \mathbf{S} の固有値 $\bar{\lambda}_\mu$ が必ずしも実数にはならないことの影響に注目する。

もし、固有値 $\bar{\lambda}_\mu$ が実数であれば、解 (24) の右辺の二番目の指数関数の肩は、式 (19) の場合と同様に純虚数になるので、解 (24) は振動しながら振幅が指数関数的に減少する関数を表す。そのため、式 (19) で考察したように、時間と共に振幅が発散するような挙動は発生することがない。

次に、もし固有値 $\bar{\lambda}_\mu$ が複素数になったとして、その影響を考察する。このとき、 α と β を適当な実数として

$$\sqrt{\bar{\lambda}_\mu - (\gamma/2)^2} = \alpha + i\beta \quad (26)$$

と表すことができる．これを用いて解 (24) を書き換えると

$$a_\mu(t) = a_\mu(0) \exp \left[- \left(\frac{\gamma}{2} \pm \beta \right) t \right] \exp [\pm i \alpha t] \quad (27)$$

となる．式 (27) の構造から， $a_\mu(t)$ の振幅は $|\beta| > \gamma/2$ のときに時間と共に発散することがわかる． $\bar{\omega}_\mu = \sqrt{\lambda_\mu}$ としたときノード i の振動エネルギーは

$$E_i = \sum_{\mu=0}^{n-1} |\bar{\omega}_\mu a_\mu(t) \bar{v}_\mu(i)|^2 \quad (28)$$

となるから， $a_\mu(t)$ の発散はノードの振動エネルギーの発散に結びつく．これが，ネットワーク上の振動ダイナミクスからネット炎上のような特異で爆発的な振舞いが自律的に引き起こされるためのモデルを与えていると解釈できる．

発散が生じる仕組みがわかると，それを起こさない条件を考えることでネット炎上の防止技術を検討することが出来る． $\gamma \geq 0$ の値にかかわらず常にネット炎上の発生を防止するには， \mathcal{L} の固有値が全て実数であればよい．有向グラフ $\mathcal{G}(V, E)$ が対称化可能であるという条件は， \mathcal{L} の固有値が全て実数となるための十分条件であるので $\mathcal{G}(V, E)$ を対称化可能に調整することでネット炎上を防止する技術を考察する．そのためには \mathcal{L}_1 の影響を排除するような操作ができれば良い．

ネットワーク上でノード $i = i_1, i_2, \dots, i_k$ が閉路を構成しているとし， $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$ に沿った閉路のリンクの重みの積を考える．もし全ての隣接ノード間で条件 (1) が成立するとすると

$$\begin{aligned} w_{i_1 i_2} w_{i_2 i_3} \cdots w_{i_k i_1} &= \frac{m_{i_2}}{m_{i_1}} w_{i_2 i_1} \frac{m_{i_3}}{m_{i_2}} w_{i_3 i_2} \cdots \frac{m_{i_1}}{m_{i_k}} w_{i_1 i_k} \\ &= w_{i_1 i_k} \cdots w_{i_3 i_2} w_{i_2 i_1} \end{aligned} \quad (29)$$

となるので，閉路の右回りと左回りのリンクの重みの積が等しくなる．また，これが成り立てば条件 (1) を満たす m_i, m_j を選ぶことができる．このことから，任意の閉路について右回りと左回りのリンクの重みの積が等しくなるよう調整することで，有向グラフを対称化可能にすることができる．そのためのリンクの重みの調整は，閉路上のどのリンクに対して実施しても良い．この任意性が Laplacian 行列の分解 (6) の採り方の自由度と関連している．

次に図 8 上図に示すように二つの閉路 C_1 と C_2 を考え，それぞれの右回り / 左回りのリンクの重みの積を R_1, L_1 及び R_2, L_2 とする．また C_1 と C_2 が図 8 下図のように経路の一部を共有しているとし，共有部分のリンクについて重みの上向き / 下向きの積をそれぞれ U, D とする．このとき， C_1 と C_2 を結合してできる大きな閉路 C_{1+2} (図 8 下図の太線) の重みの積を考えると， $R_1 = L_1$ 及び $R_2 = L_2$ の条件の下で

$$\frac{R_1}{D} \frac{R_2}{U} = \frac{L_1}{U} \frac{L_2}{D} \quad (30)$$

となるから，閉路 C_{1+2} も右回りと左回りのリンクの重みの積は等しい．このことから，調整する閉路は分割不可能な閉路のみで十分である．

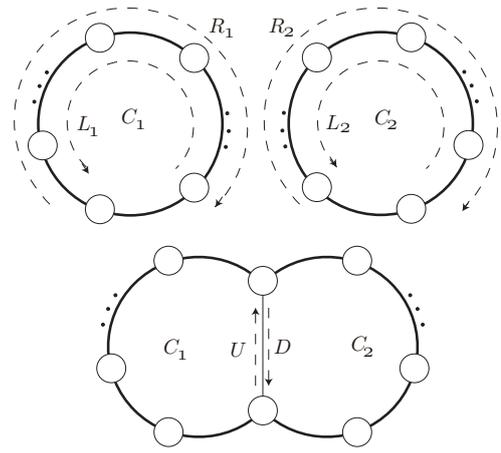


図 8: 二つの閉路 C_1, C_2 とそれらを組み合わせた閉路についてのリンクの重みの積

5 おわりに

本稿では，ソーシャルメディアネットワークにおけるユーザ間の非対称相互作用によって生ずるダイナミクスを記述するための，ネットワーク上の振動モデルについて議論した．まず，非対称相互作用を特徴づける有向リンクについて考察し，対称化可能な有向グラフとそれ以外の分類を行った．次に，対称化可能な有向グラフ上で振動モデルを導入し，その解の特徴について述べた．この場合，ネットワーク上の振動モードが独立な調和振動子で表現でき，各ノードの振動エネルギーは既存のノード中心性概念を含むノード中心性の拡張概念を与えることを示した．更に，振動モデルを一般の有向グラフに拡張し，その結果，ネット炎上のようなノード中心性が発散する現象が記述できることを述べた．同時に，発散を防止するための技術について議論した．このように，ネットワーク上の振動モデルは，一方で従来のグラフ理論の結果であるノード中心性の結果を再現しつつ，人と人の複雑な関係を表現できるモデルであることが分かる．

謝辞

本研究は科研費基盤研究 (B) 26280032 より研究費の支援を受けて実施した．

参考文献

- [1] F. R. K. Chung, *Lectures on spectral graph theory*, volume 92 of *CBMS Lecture Notes*, AMS Publications, Providence, 1995.
- [2] D. Spielman, “Spectral graph theory,” Chapter 18 of *Combinatorial Scientific Computing* (Eds. U. Naumann & O. Schenk), pp. 495–524, Chapman and Hall/CRC, 2012.

- [3] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction*, chapter 6.13 The graph Laplacian, pp. 152–157. Oxford University Press, Providence, 2010.
- [4] S. Brin and L. Page, “The Anatomy of a largescale hypertextual web search engine,” *Computer Networks and ISDN Systems*, vol. 30, Issues 1–7, pp. 107–117, 1998.
- [5] 会田雅樹, 情報ネットワークの分散制御と階層構造, 情報ネットワーク科学シリーズ第 3 巻, コロナ社, 2015.
- [6] M. Aida, “Oscillation model for describing propagation of activities on network caused by asymmetric node interactions,” Keynote Speech at *IEICE Information and Communication Technology Forum 2016*, July 2016.
- [7] M. Aida, C. Takano, and M. Murata, “Oscillation model for network dynamics caused by asymmetric node interaction based on the symmetric scaled laplacian matrix,” In *Proceedings of The 12th International Conference on Foundations of Computer Science (FCS 2016)*, 2016.
- [8] C. Takano and M. Aida, “Proposal of new index for describing node centralities based on oscillation dynamics on networks,” In *Proceedings of IEEE GLOBECOM 2016*, 2016.
- [9] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover Books on Chemistry, 2003.
- [10] L. C. Freeman, “Centrality in social networks: Conceptual clarification,” *Social Networks*, vol. 1, no. 3, pp. 215–239, 1979.
- [11] L. C. Freeman, S. P. Borgatti, and D. R. White, “Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow,” *Social Networks*, vol. 13, no. 2, pp. 141–154, 1991.
- [12] P. J. Carrington, J. Scott, and S. Wasserman, *Models and Methods in Social Network Analysis*, Cambridge University Press, 2005.

付録: ネットワーク上の振動モデルに関する正準運動方程式

Hamilton の正準形式により, ネットワーク上の非減衰振動の運動方程式を導出する.

ノード i - j 間のバネ係数を $k_{ij} > 0$ とし, ノード i の質量を $m_i > 0$ とする. 時刻 t におけるノード i の変位を $x_i = x_i(t)$ とし, その共役運動量を $p_i = p_i(t)$ とする. このとき, ネットワーク上の結合振動子の Hamiltonian \mathcal{H} (システムの全エネルギー) は, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和として

$$\mathcal{H} := \sum_{i \in V} \frac{(p_i)^2}{2m_i} + \sum_{(i,j) \in E} \frac{k_{ij}}{2} (x_i(t) - x_j(t))^2 \quad (31)$$

のように書ける. Hamilton の正準形式に従うと, 正準運動方程式と呼ばれる運動方程式は以下のように与えられることが知られている.

$$\begin{cases} \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \\ \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}$$

これに Hamiltonian (31) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= -\sum_{j \in V} L_{ij} x_j(t) \\ \frac{dx_i(t)}{dt} &= \frac{p_i}{m_i} \end{aligned}$$

を得る. 正準運動方程式から p_i を消去すると, 運動方程式として以下の波動方程式を得る.

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -L \mathbf{x}(t)$$

ここで, $\mathbf{x}(t)$ はノードの変位を表す列ベクトル

$$\mathbf{x}(t) := {}^t(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

であり, M は質量行列 $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ である.